

物性物理 100 問集 訂正箇所

物性物理 100 問集 (大阪大学出版, 2016 年) の訂正箇所を以下, 赤字で記す. 初版第 2 刷にて訂正済みの箇所については <http://www.msc.osaka-u.ac.jp/physics100/> に別途記載している. 以下は初版第 2 刷でも訂正されていない箇所である.

訂正履歴

2017年4月11日	問 60 (30 ページ), 問 60 解答例 (105 ページ)
2017年4月14日	問 17 解答例 (62 ページ)
2017年4月19日	問 22 解答例 (67 ページ), 問 32 (16 ページ), 問 32 解答例 (75 ページ), 問 34 (17 ページ)
2017年4月28日	問 53 解答例 (92 ページ), 問 67 解答例 (111 ページ), 問 71 解答例 (114 ページ)
2017年5月4日	問 34 (17 ページ), 問 34 解答例 (77 ページ)
2017年5月17日	問 34 解答例 (76 ページ)
2017年5月23日	問 10 解答例 (56 ページ), 問 37 解答例 (81 ページ)
2017年5月24日	問 38 (18 ページ), 問 38 解答例 (81 ページ)
2017年5月25日	問 84 解答例 (125 ページ)
2017年6月1日	問 83 解答例 (124 ページ)
2017年6月14日	問 56 (27 ページ)
2017年6月22日	問 4 (4 ページ), 問 4 解答例 (53 ページ)
2017年7月12日	問 26(13~14 ページ), 問 26 解答例 (69~70 ページ), 問 37 解答例 (80 ページ), 問 41 解答例 (83 ページ), 問 67 解答例 (111 ページ)
2017年7月17日	問 48 解答例 (88 ページ), 問 50 解答例 (90 ページ)
2017年7月21日	問 40 (19 ページ), 問 40 解答例 (82 ページ)
2017年7月24日	問 36 解答例 (78~79 ページ)
2017年8月9日	問 1 解答例 (49 ページ)
2017年8月29日	問 71 (35 ページ)
2018年5月4日	問 26 解答例 (69 ページ)
2018年6月3日	問 32 (16 ページ), 問 32 解答例 (75 ページ)
2018年6月26日	問 55 解答例 (95 ページ), 問 83 解答例 (125 ページ)
2018年7月22日	問 41 (20 ページ), 問 59 (30 ページ)
2018年7月23日	問 37 解答例 (79 ページ)
2019年6月14日	問 67 (34 ページ)
2019年6月21日	問 80 解答例 (121 ページ)
2019年6月28日	問 60 解答例 (106 ページ)
2019年7月17日	問 32 (16 ページ)
2019年7月19日	問 84 解答例 (125 ページ)
2019年7月26日	問 57 (28 ページ), 問 80 解答例 (121 ページ), 問 83 解答例 (124 ページ), 問 84 解答例 (125 ページ), 問 85 解答例 (126 ページ)
2019年8月5日	問 33 解答例 (75 ページ), 問 49 解答例 (89 ページ)
2019年8月8日	問 48 解答例 (23 ページ)

問 1 量子力学における基底変換【解答例】 (49 ページ)

- (2) ... 次に規格化定数 N を求めるために $\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$ の左辺に恒等演算子の分解を適用する. ...

問4 量子力学における調和振動子 (4 ページ)

(3) ...

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^*(x) \chi_0(x - \lambda) \right|^2 = e^{-m\omega\lambda^2/2\hbar} \frac{(m\omega\lambda^2/2\hbar)^n}{n!}$$

問4 量子力学における調和振動子【解答例】 (53 ページ)

(3) ...

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^*(x) \chi_0(x - \lambda) \right|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^*(x) e^{-\lambda \frac{d}{dx}} \chi_0(x) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^*(x) e^{\bar{\lambda} \hat{a}^\dagger} e^{-\bar{\lambda} \hat{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \chi_0(x) \right|^2 \\ &= e^{-\bar{\lambda}^2 \frac{\lambda^2}{2}} \frac{\bar{\lambda}^{2n}}{n!} = e^{-m\omega\lambda^2/2\hbar} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^n \frac{\lambda^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

問10 表面吸着の統計力学による解析【解答例】 (56 ページ)

(2) ... ここで $P_0 = (\lambda^3 \beta e^{\beta \epsilon_0})^{-1}$ である. ...

問17 Brillouin 領域の描画【解答例】 (62 ページ)

...

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \\ &= \frac{2\pi}{3a^2} a (0, 0, 1) \times (1, 0, 0) \\ &= \frac{2\pi}{3a} (0, 1, 0) \end{aligned}$$

この \mathbf{b}_2 は, 問15の解答例で示した $\mathbf{b}_2 = 2\pi(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n})/|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$ とは逆向きだが, 逆格子ベクトルは一般に $\mathbf{G} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2$ (m_i は整数) と書かれるので, どちらで表しても構わない. 図 2A.2 に逆格子を图示する.

問22 結晶における回折条件【解答例】 (67 ページ)

(3) ...

$$d = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{h} = \frac{1}{|\mathbf{G}|} (h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3) \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{h} = \frac{2\pi}{|\mathbf{G}|}$$

問26 回折パターンによる格子定数の同定 (13~14 ページ)

周期的に配置された散乱体からなる2次元格子試料にレーザー光(波長 λ) を照射し, 試料から十分後方の距離 L に配置したスクリーンで回折パターンを投影させ, 得られた逆格子像から試料の格子定数の決定を試みる. 簡単のため, 試料は極めて薄く光軸に対して垂直な2次元構造のみを有するとし,

...

(1) $\lambda = 632.8$ [nm], $L = 3.0$ [m] の光学系において, 未知の格子定数 a_1, a_2 ($a_1 > a_2$) を有する単純直方格子多結晶試料の回折パターンを取得したところ, ...

- (2) ... 続いて, 同一の光学系において, 格子定数未知の非単純非直交格子試料を用いて実験を行ったところ, 図 3.2 に示すような周期的な回折パターンが得られた. 様々な指数の付け方がありうるが, 図 3.2 に示したように設定するとして, 非単純非直交格子試料の予想される実格子パターンを各格子点の指数を含めて図示せよ.

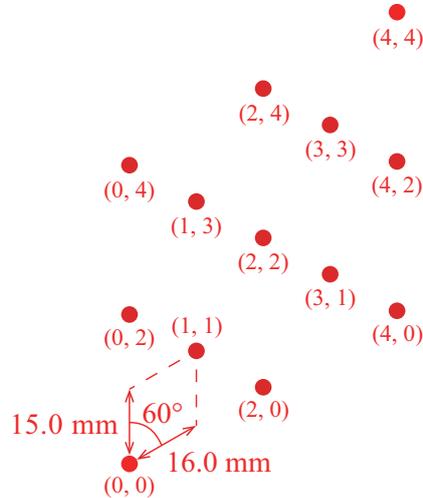


図 3.2: 非単純非直交格子試料の回折パターン

問 26 回折パターンによる格子定数の同定【解答例】 (69 ~ 70 ページ)

- (1) 一般に, 3次元系における逆格子ベクトル b_i ($i = 1, 2, 3$) は, 実格子ベクトル a_i に対して以下のように表される.

$$b_1 = \frac{2\pi a_2 \times a_3}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

2次元格子においては, a_1, a_2 を格子面内方向の基本ベクトル, a_3 を格子面垂直方向の単位ベクトルとして考えればよいので, 逆格子ベクトル b_1 の向きは格子面内かつ a_2 に対して垂直方向, 大きさは

$$|b_1| = \frac{2\pi |a_2| |a_3|}{|a_1| (|a_2| |a_3|) \cos(\Theta - 90^\circ)} = \frac{2\pi}{|a_1| \sin \Theta}$$

と求められる. ここで, Θ は a_1, a_2 間の内角である. b_2 についても同様である. また, Braggの法則より以下の式が成り立つ.

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{2|a_i|} = \frac{\lambda |b_i|}{4\pi} \sin \Theta$$

すなわち, $\lambda = 632.8 \times 10^{-6}$ [mm], $L = 3.0 \times 10^3$ [mm], $\Theta = 90$ [°] より, スクリーン上では $|b_i|$ に対して,

$$m = L \tan 2\theta \approx \frac{\lambda L}{2\pi} \sin \Theta = \frac{0.95}{\pi} [\text{mm}^2]$$

倍された逆格子パターンが投影されることになる. また, 多結晶の回折パターンは単結晶とは異なり, 様々な方向を持った結晶面の逆格子点が重なり合うことで同心円上に繋がったものになる. これを Debye-Sherrer 環と呼ぶ. $21 \times 2 > 32$ より $2a_2 > a_1 > a_2$ であるので, 得られた Debye-Sherrer 環は小さいものから順に, 指数 $(h, k) = (1, 0), (0, 1), \dots$ の逆格子に対

応ることが分かる。したがって、逆格子ベクトルの大きさはそれぞれ $|\mathbf{b}_1| = 69.5 \text{ [mm}^{-1}]$, $|\mathbf{b}_2| = 105.9 \text{ [mm}^{-1}]$ となり、実空間の格子定数はそれぞれ $a_1 = 90.4 \text{ [}\mu\text{m}]$, $a_2 = 59.3 \text{ [}\mu\text{m}]$ と求められる。

- (2) 単純正方格子の測定結果から、本光学系においてスクリーン上に投影される逆格子パターンの倍率は、

$$m = \frac{5}{|\mathbf{b}|} = \frac{5}{2\pi/(0.1 \times 10^{-3})} = \frac{2.5}{\pi} \times 10^{-4} \text{ [mm}^2\text{]}$$

と求められる。 $m|\mathbf{b}_1| = 16 \text{ [nm]}$, $m|\mathbf{b}_2| = 15 \text{ [nm]}$, また $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 間の内角が 60° であることから、非単純非直交格子試料の実空間の格子定数はそれぞれ $a_1 = 36.1 \text{ [nm]}$, $a_2 = 38.5 \text{ [nm]}$, 内角は $\Theta = 120^\circ$ と求められる。

単位格子中に含まれる散乱体数を N , j 番目の散乱体の位置を $r_j = x_j \mathbf{a}_1 + y_j \mathbf{a}_2$ とすると ($0 \leq x_j, y_j < 1$), 構造因子は

$$F(h, k) = \sum_j^N \exp\{i2\pi(hx_j + ky_j)\}$$

で表される。図 3.2 より、指数 $(h, k) = (1, 0), (0, 1), (3, 0), (2, 1), \dots$ に対応する逆格子点での強度が消滅している ($F = 0$) ことから、消滅則は $h + k = (\text{奇数})$ である。この条件を満足する散乱体配置は、

$$F(h, k) = 1 + \exp\{i\pi(h + k)\} = 0$$

のとき、すなわち $(x_j, y_j) = (0, 0), (1/2, 1/2)$ と求められる。以上より、予想される実格子パターンは図 3A.4 のようになる。なお、 L が数 m の現実的な光学系で上記の倍率を達成しようとするとき、波長領域が $\lambda \approx 10^{-10} \text{ [m]}$ 程度である X 線が必要となる。また、本問では実空間で体心格子となるよう指数を指定したが、単純格子となるように指数を付けることも可能である。

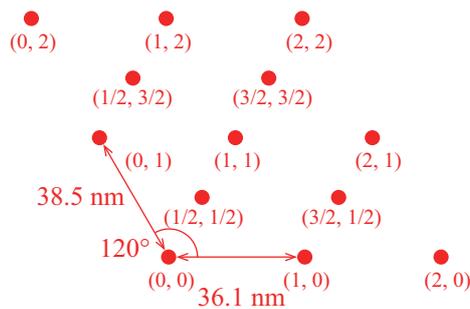


図 3A.4: 非単純非直交格子試料の実格子パターン

問 32 Debye モデルにおける格子比熱 (16 ページ)

- (2) 結晶を伝搬する角振動数には上限が存在し、密度 $1/a^3 = N/L^3$ に依存する ($N = (L/a)^3$ は原子数)。 (1) で求めた状態密度を参考にして、このモード数を与える上限の角振動数 ω_D を求めよ。これを Debye 角振動数と呼ぶ。
- (3) フォノンが Bose 粒子であることを考慮してフォノンのエネルギーを求めよ。また、以降の計算のために、 $x_D = \hbar\omega_D/k_B T$, $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ を用いて簡略化せよ。

問 32 Debye モデルにおける格子比熱【解答例】 (75 ページ)

- (1) 波数空間において、波数 q を半径とした球内にある状態数 (モード数) M は、**振動モードの自由度 3 まで考慮すると**

$$M = 3 \times \frac{4\pi q^3}{3} \frac{L^3}{(2\pi)^3}$$

で表される。分散関係 $\omega(q) = vq$ と状態密度の定義から、状態密度は以下ようになる。

$$D(\omega) = \frac{dM}{d\omega} = \frac{dM}{dq} \frac{dq}{d\omega} = \frac{3L^3}{2\pi^2 v^3} \omega^2$$

- (2) **全モード数 (つまり原子数 $N = (L/a)^3$ と振動モードの自由度 3 の積)** と状態密度の関係式は、

$$3N = \int_0^\infty D(\omega) d\omega = \int_0^{\omega_D} D(\omega) d\omega$$

となる。(1) で導出した状態密度を用いて、Debye 角振動数 $\omega_D^3 = 6\pi^2 N v^3 / L^3 = 6\pi^2 v^3 / a^3$ が求められる。

- (3) 分布関数として Bose 分布を用いると、エネルギーは、

$$E = \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} D(\omega) d\omega = \frac{3\hbar L^3}{2\pi^2 v^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega$$

...

問 33 融解温度と Debye 温度【解答例】 (75 ページ)

...これを Debye 温度 Θ_D について解くと、

$$\Theta_D \sim \frac{1}{\delta} \frac{3h}{2\pi R} \sqrt{\frac{T_m}{M k_B}} = \frac{1}{\delta} \frac{1}{(r/\text{\AA})} \sqrt{\frac{(T_m/\text{K})}{\text{原子量}}} \times 10.45 [\text{K}]$$

この式から比例定数 δ を各金属に対し見積もれば、表 4A.1 のような値が得られる。よって、これらの金属に対して、 $\delta \sim 0.1$ 程度として Lindemann の融解公式が成り立つ。

表 4A.1: δ の計算結果

	δ
アルミニウム	0.100
鉄	0.101
銅	0.110
銀	0.109
金	0.115

問 34 Landau 準位 (17 ページ)

一様な静磁場を印加した 3 次元電子系に関して、ベクトルポテンシャルを $A = (By, 0, 0)$ (つまり磁束密度が $B = (0, 0, -B)$ と z 軸方向) として、以下の問いに答えよ。...

問 34 Landau 準位【解答例】 (76, 77 ページ)

(2) ..., $\omega_c = e|B|/m$ と定義すると, ...

(3) ... 状態密度は,

$$D(E)dE = \frac{4V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi m\omega_c}{\hbar} \sum_n dk_{z,n}(E)$$

となる. ここで, 4 という係数は, スピン自由度および, 与えられたエネルギー E に対して $k_{z,n}(E)$ が正負の 2 通りあることに由来する. z 軸に垂直な方向の自由度が n で特徴づけられる時, z 軸方向の正の波数は以下のように表される.

$$k_{z,n} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \sqrt{E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{dk_{z,n}}{dE} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)}}$$

よって, 状態密度は,

$$D(E) = \frac{(2m)^{3/2}\omega_c V}{4\pi^2\hbar^2} \sum_n \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)}} \right]$$

として与えられる. この関数を適当なスケールでプロットすると図 5A.1 のようなグラフが得られる.

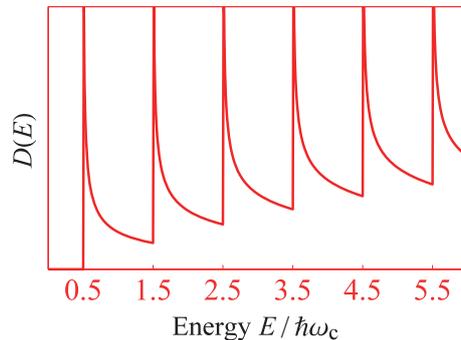


図 5A.1: 磁場が印加された 3 次元電子系の状態密度の概形

問 36 自由電子系の化学ポテンシャル【解答例】 (78 ~ 79 ページ)

化学ポテンシャル μ は, 絶対零度では全粒子の占有が完了するエネルギーと見なすことができる. 一方, 有限温度では以下のように決められる. Fermi 分布関数 $f(E)$ は μ と温度 T を用いて以下のように書ける.

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/(k_B T)] + 1}$$

この Fermi 分布関数と状態密度 $D(E)$ を用いて, 全粒子数 N は以下のように表される.

$$N = \int_0^\infty D(E)f(E) dE$$

すなわち, 図 5A.2 の実線を積分することになる. その積分値が, 温度に依らず一定値 N を与えるように化学ポテンシャル μ は決められる.

...

問 37 自由電子系の比熱【解答例】 (80~81 ページ)

(2) 3次元自由電子の数 n は, 状態密度 $D(E)$ と Fermi 分布関数 $f(E)$ を用いて,

$$n = \int_0^{\infty} D(E)f(E)dE$$

...

(3) ... (2) で得られた化学ポテンシャルの表式を用いて, 全体として温度の 2 次まで評価することを考えると,

$$\frac{2}{5}C\mu^{5/2} \approx \frac{2}{5}CE_F^{5/2} \left[1 - \frac{5}{2} \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right] = D(E_F) \left[\frac{2}{5}E_F^2 - \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \right]$$

問 38 低温における電子の輸送現象 (18 ページ)

(2) 温度差と電場の両方が存在する場合, Fermi 分布関数 f はそれらが無い平衡状態の分布 f_0 からずれる. 温度差, 電場が十分小さい場合を仮定すると, 分布関数は,

$$f(k) = f_0(k) + \left[e\tau(k)\nu(k) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \right] E + \left[\tau(k)\nu(k) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) (\epsilon(k) - \mu) \right] \left(-\frac{1}{T} \right) \frac{dT}{dx}$$

で与えられる. ...

(3) 温度勾配がない場合, 電流密度は電気伝導度 σ と電場 E の積で与えられる. 電気伝導度を求めよ. また, 今後の計算のため以下の K_n ($n = 0, 1, 2$) を使い, 答えを整理せよ.

$$K_n = \int_{-\infty}^{\infty} L(\epsilon)(\epsilon - \mu)^n \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon$$

$$L(\epsilon) = \sum_k \tau(k)\nu^2(k)\delta(\epsilon - \epsilon_k)$$

問 38 低温における電子の輸送現象【解答例】 (81 ページ)

(4) 単純に代入すれば,

$$J = e \sum_k \nu(k)f(k)$$

$$= \sum_k \left\{ e\nu(k)f_0(k) + \left[e^2\tau(k)\nu^2(k) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \right] E + \left[e\tau(k)\nu^2(k) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) (\epsilon(k) - \mu) \right] \left(-\frac{1}{T} \right) \frac{dT}{dx} \right\}$$

を得る. 第 1 項目は電場がない状況を表し, 対称性から必ず 0 になる. これにより,

$$J = \sum_k \left\{ \left[e^2\tau(k)\nu^2(k) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \right] E + \left[e\tau(k)\nu^2(k) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) (\epsilon(k) - \mu) \right] \left(-\frac{1}{T} \right) \frac{dT}{dx} \right\}$$

が得られる.

問 40 de Haas–van Alphen 効果を用いた Fermi 面の観測法 (19 ページ)

- (1) 一般に, Planck 定数を h として, 運動量 p を閉じた軌道に沿って積分した値が $\oint p \cdot ds = (n+1/2)h$ と量子化される ($n = 0, 1, 2, \dots$) 条件が, Bohr–Sommerfeld の量子化条件として知られている. つまり, 電子の波数ベクトルを k とすれば, 磁場がない場合の電子に対しては, $\oint \hbar k \cdot ds = (n+1/2)h$ と書ける. 磁場中における電子に対する Bohr–Sommerfeld の量子化条件を書き下せ.
- (2) ... 式 (5.1) を時間に関して積分すると, 電子は $dk/dt = F/h$ に従って波数空間を移動する (波数ベクトルを変える) ことから, ...
- (3) 式 (5.2) より, 波数空間における一定のエネルギー ϵ の電子が囲む軌道面積 A と S の関係を求めよ. さらに, (2) で求めた式を用いて, A と磁場の強さ H の関係を求めよ.

問 40 de Haas–van Alphen 効果を用いた Fermi 面の観測法【解答例】 (82 ページ)

- (1) ベクトルポテンシャル A , Coulomb ポテンシャル ϕ , 電場 $E = -\dot{A} - \text{grad}\phi$, 磁束密度 $B = \text{rot}A$ に対して, 質量 m , 電荷 $-e$ の電子の位置 r と速度 $v = \dot{r}$ は Newton の運動方程式 $m\dot{v} = -eE - ev \times B$ に従う. これを与えるラグランジアンは $L = (m/2)\dot{r}^2 - e\dot{r} \cdot A(r) + e\phi(r)$ と書ける. つまり, 電磁場中での電子の運動量は $p = \partial L / \partial \dot{r} = mv - eA$ と表される. よって, 磁場中の電子に対して, Bohr–Sommerfeld の量子化条件は, 以下のように書かれる.

$$\oint (mv - eA) \cdot ds = \oint (\hbar k - eA) \cdot ds = \left(n + \frac{1}{2}\right)h \quad (5A.3)$$

ここで, $\hbar k$ は磁場の影響を差し引いた電子の運動量, k は電子の波数ベクトルを表す.

- (3) ...

$$A_n = \frac{2\pi e\mu_0 H}{\hbar} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (5A.4)$$

A_n は軌道の面に垂直な波数成分 (以下 k_z とする) に対して一定であるため, 波数空間で電子軌道は断面積 A_n の円筒を形成する. この円筒を Landau チューブと呼ぶ. 式 (5A.4) の n が大きくなると, 電子軌道が囲む円も拡大するため, 波数空間でこの電子の存在が許される領域は多層の同軸円筒構造となる.

ただし, k_z に対して面内の運動エネルギーは一定だが, z 軸方向の運動を含めた総運動エネルギーは変化するため, Landau チューブが等エネルギー面を形成しているわけではないことに注意する.

- (4) ... 波数空間で極大, 極小となる断面である. 例を挙げると, ひょうたん型の Fermi 面では, 上下の膨らみと中央のくびれにおける 3 つの断面積を求めることができる. これは, このような極値断面積において, Fermi 面と Landau チューブの重なる領域が最大となり, 状態密度が最大となるためである.

問 41 3 次元系の Bose–Einstein 凝縮 (20 ページ)

- (3) $T < T_0$ における定積比熱を計算せよ. なお, 比熱の温度微分は T_0 を境に不連続となる. これは, Bose–Einstein 凝縮が連続相転移であることを意味する.

問 41 3次元系の Bose-Einstein 凝縮【解答例】(83 ページ)

(1) ... 温度について解くと,

$$T_0 = \frac{\hbar^2}{2mk_B} \left[\frac{4\pi^2 n}{\zeta(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})} \right]^{2/3}$$

を得る.

問 48 Hall 効果による物理量の推定 (23 ページ)

... 電磁場下における Drude モデルを仮定し, 電気伝導度, Hall 係数を求める. 磁束密度に平行な方向については考えなくてよい. ...

問 48 Hall 効果による物理量の推定【解答例】(88 ページ)

(2) 設問 (1) で得られた式を $\omega = 0$ とすればよい. これにより易動度 μ は以下となる.

$$\mu = -\frac{e\tau}{m}$$

(3) 電流密度は $j = -nev$ で定義されるため, 電子の散乱時間を τ_e , サイクロトロン角振動数を ω_e として以下を得る.

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = -ne\mu_e \begin{pmatrix} 1 & -\omega_e\tau_e \\ \omega_e\tau_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

ホールの場合電荷の符号が逆転し, ホールの緩和時間を τ_h , サイクロトロン角振動数は ω_h とすると,

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = p\mu_h \begin{pmatrix} 1 & \omega_h\tau_h \\ -\omega_h\tau_h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

となる. 電子とホールがキャリアとして存在する場合, 上記の式を合わせたものが電流密度となるため, 電気伝導率テンソル σ は,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(-n\mu_e + p\mu_h) & +e(\omega_e\tau_en\mu_e + \omega_h\tau_hp\mu_h) \\ -e(\omega_e\tau_en\mu_e + \omega_h\tau_hp\mu_h) & e(-n\mu_e + p\mu_h) \end{pmatrix}$$

と得られる. $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ となる.

(4) 電流の式を電場について解くと,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ +\sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

を得る. 電流が x 方向に流れているとすると $j_y = 0$ なので,

$$E_y = +\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} j_x$$

弱磁場の極限 $B \rightarrow 0$ とし, $\tau_{e,h}$ と $\omega_{e,h}$ を消去すれば,

$$\frac{E_y}{j_x B} = \frac{-e(n\mu_e^2 - p\mu_h^2)}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \rightarrow \frac{-e(n\mu_e^2 - p\mu_h^2)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{e(p\mu_h - n\mu_e)^2}$$

したがって, Hall 係数は,

$$R_H = \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{e(p\mu_h - n\mu_e)^2}$$

となる.

問 49 Drude モデルにおける Hall 効果【解答例】 (89 ページ)

(3) ... よって, 半導体の方が Hall 係数 R_H の絶対値が大きいから, ...

問 50 サイクロトロン共鳴を用いた電子の有効質量の測定法【解答例】 (90 ページ)

(2) ... x 方向の電流密度 $j_x = \text{Re}[\tilde{j}_x e^{-i\omega t}]$ を与える複素振幅 \tilde{j}_x は,

$$\tilde{j}_x = -qn\tilde{v}_x = \frac{q^2 n A}{m^*} \frac{-i\left(\omega + \frac{qB}{m^*}\right) + \frac{1}{\tau}}{\left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{qB}{m^*}\right)^2} = \frac{q^2 n}{m^*} \frac{1}{-i\left(\omega - \frac{qB}{m^*}\right) + \frac{1}{\tau}} A$$

であるので, 複素伝導率 σ は,

$$\sigma = \frac{\tilde{j}_x}{A} = \frac{q^2 n}{m^*} \frac{1}{-i\left(\omega - \frac{qB}{m^*}\right) + \frac{1}{\tau}}$$

...

問 53 Bloch の定理【解答例】 (92 ページ)

(1) ハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

と表されることから, 独立した 1 電子の Schrödinger 方程式は以下のように書かれる.

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

問 55 2 次元正方格子における強束縛近似【解答例】 (95 ページ)

(3) 式 (7A.2) のエネルギーを第 1 Brillouin 領域内の全ての波数 $(-\pi/a \leq k_x < \pi/a, -\pi/a \leq k_y < \pi/a)$ で積分することを考える. このとき, 系全体のエネルギーは,

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} E_k dk_x dk_y \frac{Na^2}{(2\pi)^2} \\ &= -2t \left[\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \cos(k_x a) dk_x \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_y + \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_x \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \cos(k_y a) dk_y \right] \frac{Na^2}{(2\pi)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

問 56 蜂の巣格子におけるエネルギーバンド【解答例】 (27 ページ)

... このときのハミルトニアンは第 2 量子化を用いて,

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{R}} t \left(c_{\mathbf{r}_0+\mathbf{R},2}^\dagger c_{\mathbf{r}_0+\mathbf{R},1} + c_{\mathbf{r}_1+\mathbf{R},2}^\dagger c_{\mathbf{r}_0+\mathbf{R},1} + c_{\mathbf{r}_2+\mathbf{R},2}^\dagger c_{\mathbf{r}_0+\mathbf{R},1} + \text{H.c.} \right)$$

と書くことができる. ここで $c_{\mathbf{r}+\mathbf{R},n}$ は, 位置 $\mathbf{r} + \mathbf{R}$ の単位格子内にある原子 (黒丸: $n = 1$, 白丸: $n = 2$) の電子の消滅演算子を表し, $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{r}_1 = (-3a/2, \sqrt{3}a/2)$, $\mathbf{r}_2 = (-3a/2, -\sqrt{3}a/2)$ であり, \mathbf{R} は各格子の位置を表す. また, N は格子点の数であり, t は電子の飛び移り積分を表す. ...

問 57 kp 摂動に基づくエネルギーバンド (28 ページ)

- (1) ... 式を簡単にするために,

$$P = \frac{\hbar}{m} \int u_s^*(\mathbf{r}) \hat{p}_j u_j(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

を用いてよい.

問 59 半導体中の電子密度と正孔密度 (30 ページ)

- (1) ... ただし, 伝導帯の底のエネルギーは E_c , 価電子帯の頂上のエネルギーは E_v , Fermi 準位 (化学ポテンシャル) は E_F と表し図に記入せよ.
- (2) 電子密度 n と正孔密度 p が次式で与えられることを示せ. **ただし, $E_c - E_F \gg k_B T$, $E_F - E_v \gg k_B T$ とする...**

問 60 pn 接合における空乏層 (30 ページ)

... p 型半導体と n 型半導体の単位長さあたりの電荷密度の絶対値を ρ_p, ρ_n として ...

問 60 pn 接合における空乏層【解答例】 (105 ~ 106 ページ)

- (1) ... n 型半導体の空乏層領域 ($-x_n < x < 0$) の電位 $\phi_n(x)$ を考える. **電荷密度の絶対値が ρ_n とすれば, 実際の電荷密度は $-\rho_n$ なので,** Poisson 方程式より,

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) = \frac{\rho_n}{\epsilon} \quad (8A.1)$$

... が成り立つ. n 型半導体内部の伝導帯のエネルギーを基準にとつたため, x が正に十分大きい領域での電位は $V + V_D$ となる. **ただし, ここでは $V < 0$ が順バイアス, $V > 0$ が逆バイアスに対応するよう V の向きをとつた.** 境界条件は以下のようになる. ...

問 67 時間に依存する摂動論と状態遷移 (34 ページ)

- (2) $t = 0$ において, 系の状態が u_0 にあったとする. 摂動の 1 次まで評価することにより, ...

問 67 時間に依存する摂動論と状態遷移【解答例】 (111 ページ)

- (2) (1) で得られた時間発展の方程式に対して具体的な \mathcal{H}_{int} の表式を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} &= \frac{e^{i\epsilon_m t/\hbar}}{i\hbar} \int u_m^*(\mathbf{r}) \hat{x} F \sin(\omega t) \sum_n a_n(t) u_n(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_n t/\hbar} d^3\mathbf{r} \\ &= \dots \end{aligned}$$

となる. 一次の摂動まで評価すると,

$$\begin{aligned} a_m(t) &= a_m(0) - \frac{eF}{2\hbar} \sum_n \int [u_m^*(\mathbf{r}) \hat{x} u_n(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \int_0^t \left[e^{i(\epsilon_m - \epsilon_n + \hbar\omega)s/\hbar} - e^{i(\epsilon_m - \epsilon_n - \hbar\omega)s/\hbar} \right] a_n(0) ds \\ &= a_m(0) + \frac{ieF}{2} \sum_n \int [u_m^*(\mathbf{r}) \hat{x} u_n(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \left[\frac{e^{i(\epsilon_m - \epsilon_n + \hbar\omega)t/\hbar} - 1}{\epsilon_m - \epsilon_n + \hbar\omega} - \frac{e^{i(\epsilon_m - \epsilon_n - \hbar\omega)t/\hbar} - 1}{\epsilon_m - \epsilon_n - \hbar\omega} \right] a_n(0) \end{aligned}$$

となる。ただし $t = 0$ において、系の状態が u_0 であるため $a_i(0) = \delta_{i0}$ となり、

$$a_m(t) = \delta_{m0} + \frac{ieF}{2} \int [u_m^*(\mathbf{r}) \hat{x} u_0(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \left[\frac{e^{i(\epsilon_m - \epsilon_0 + \hbar\omega)t/\hbar} - 1}{\epsilon_m - \epsilon_0 + \hbar\omega} - \frac{e^{i(\epsilon_m - \epsilon_0 - \hbar\omega)t/\hbar} - 1}{\epsilon_m - \epsilon_0 - \hbar\omega} \right]$$

が得られる。

問 71 物質境界における電磁波の屈折と反射 (35 ページ)

物質の境界における電磁場の屈折, 反射について以下の問いに答えよ。ただし, 透磁率は全領域で真空の透磁率 μ_0 に近似できるものとする。

問 71 物質境界における電磁波の屈折と反射【解答例】 (114 ページ)

(3) ... 電場については、

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = [\nabla \times \mathbf{H}]_x = \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad -i\varepsilon\omega E_x = ik_y H_z, \quad E_x = -\frac{k_y H_z}{\varepsilon\omega} = -\frac{k_y H_z}{n^2 \varepsilon_0 \omega}$$

問 80 常磁性体の帯磁率【解答例】 (121 ページ)

(1) 磁化 M は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} M(H, T) &= N \frac{\sum_{M_z=-J}^{M_z=J} -gJ\mu_B M_z \exp(-gJ\mu_B M_z \mu_0 H / k_B T)}{\sum_{M_z=-J}^{M_z=J} \exp(-gJ\mu_B M_z \mu_0 H / k_B T)} \\ &= \frac{Nk_B T}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial H} \ln \left[\sum_{M_z=-J}^{M_z=J} \exp\left(-\frac{gJ\mu_B M_z \mu_0 H}{k_B T}\right) \right] \end{aligned}$$

... $aJ = AH = JgJ\mu_B\mu_0 H / k_B T$ とおくと、

$$\begin{aligned} M(H, T) &= \frac{Nk_B T}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial H} \ln \left\{ \frac{\sinh\left[\frac{AH(2J+1)}{2J}\right]}{\sinh\left(\frac{AH}{2J}\right)} \right\} \\ &= \frac{Nk_B T A}{\mu_0} \left[\frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} AH\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{AH}{2J}\right) \right] \end{aligned}$$

(3) ...

$$M = NgJ\mu_B J$$

となり, 飽和磁化の値が求められる。

問 83 2次元 Ising 模型と平均場近似【解答例】 (124 ページ)

(2) カノニカル分布による分配関数 Z は $\beta = 1/(k_B T)$ を用いて、

$$\begin{aligned} Z &= \text{tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) \\ &= \text{tr} \exp\left(\beta J z m \sum_i S_i - \beta \frac{J z N m^2}{2}\right) \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{s=\pm 1} \exp(\beta J z m s) \exp\left(-\frac{\beta J z N m^2}{2}\right) \\ &= 2^N \cosh^N(\beta J z m) \exp\left(-\frac{\beta J z N m^2}{2}\right) \end{aligned}$$

- (3) ... となる. 転移温度近傍においては $Jzm/k_B T \ll 1$ と仮定できるため, \tanh を 3 次までで Taylor 展開を行うと,

$$m = \sqrt{3} \frac{T}{T_c} \sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$$

問 84 古典論における磁性 (Bohr–van Leeuwen の定理) 【解答例】
(125 ページ)

- (2) ...

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int \cdots \int \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_i}{k_B T}\right) d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N$$

...

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int \cdots \int \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{\Pi_i^2}{2mk_B T}\right) d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N d\Pi_1 \cdots d\Pi_N$$

問 85 スピン軌道相互作用と Landé の g 因子 【解答例】 (126 ページ)

- (1) ... よって $(i, j, k) = (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}_i}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\lambda \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \hat{L}_i] \\ &= \frac{i\lambda}{\hbar} [\hat{S}_j (\hat{L}_j \hat{L}_i - \hat{L}_i \hat{L}_j) + \hat{S}_k (\hat{L}_k \hat{L}_i - \hat{L}_i \hat{L}_k)] \\ &= -\frac{\lambda}{\hbar} (-\hat{S}_j \hat{L}_k + \hat{S}_k \hat{L}_j) \\ &= \lambda (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{L}})_i \\ \frac{d\hat{S}_i}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\lambda \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \hat{S}_i] \\ &= \frac{i\lambda}{\hbar} [\hat{L}_j (\hat{S}_j \hat{S}_i - \hat{S}_i \hat{S}_j) + \hat{L}_k (\hat{S}_k \hat{S}_i - \hat{S}_i \hat{S}_k)] \\ &= -\frac{\lambda}{\hbar} (-\hat{L}_j \hat{S}_k + \hat{L}_k \hat{S}_j) \\ &= -\lambda (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{L}})_i \end{aligned}$$

となるため, Heisenberg 方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} &= \lambda (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{L}}) \\ \frac{d\hat{\mathbf{S}}}{dt} &= -\lambda (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{L}}) \end{aligned}$$

となる.

- (4) (a) (1) で導出したスピン角運動量に対する Heisenberg 方程式を,

$$\frac{d\hat{\mathbf{S}}}{dt} = -\lambda (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{J}})$$

と変形する. ここで \hat{J} の方向を z 軸として定義し, その大きさを J とすると,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{S}_x}{dt} &= -\lambda J \hat{S}_y \\ \frac{d\hat{S}_y}{dt} &= \lambda J \hat{S}_x \\ \frac{d\hat{S}_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

が成立する. このことから, スピン角運動量は J の周りを角振動数 $\omega = \lambda J$ で歳差運動することがわかる.